תרגילי בית 1. מרחבי מכפלה פנימית

גירסה סופית. (7/11/02)

---

1. נסמן ע"י $\mathcal{M}_{m\times n}^{\mathbb{R}}$ את המרחב הלינארי של מטריצות מגודל $m \times n$ עם איברים ממשים.
(ז"א כל מטריצה ב $\mathcal{M}_{m\times n}^{\mathbb{R}}$ היא בעלת m שורות ו n עמודים.)
עבור כל $A = \{a_{ij}\}$ ו $B = \{b_{ij}\}$ ב $\mathcal{M}_{m\times n}^{\mathbb{R}}$, נגדיר

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^t A\right). \qquad (*)$$

(תזכורת: כאן B^t מסמן את המטריצה המוחלפת של B, כלומר המטריצה $\{x_{ij}\}$ מגודל $n \times m$ הנתונה ע"י $x_{ij} = b_{ji}$. כמו-כן, לכל מטריצה ריבועית $Y = \{y_{ij}\}$ מגודל $k \times k$, מגדירים $\operatorname{tr}(X) = \sum_{i=1}^{k} y_{ii}$.)

א. הוכיחו שהנוסחה $(*)$ מגדירה מכפלה פנימית במרחב $\mathcal{M}_{m\times n}^{\mathbb{R}}$.

ב. יהי W תת מרחב של $\mathcal{M}_{3\times 2}^{\mathbb{R}}$ הנתון ע"י $W = \operatorname{span}\{A_1, A_2\}$, כאשר $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. מצאו את המטריצה B ב W הקרובה ביותר (לפי הנורמה המושרית ע"י $(*)$ כאשר $m = 2$ ו $n = 3$) למטריצה $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

ג. לכל A ו B ב $\mathcal{M}_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ נגדיר $\langle A, B\rangle_* = \operatorname{tr}(BA)$. האם גם נוסחה זו מגדירה מכפלה פנימית ב $\mathcal{M}_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$? נמקו את תשובותיכם.

---

2. יהי V מרחב כל הפונקציות הממשיות $f : (0, 3] \to \mathbb{R}$ כך ש f מקבלת ערכים קבועים בכל אחד מהקטעים $(0, 1]$, $(1, 2]$ ו $(2, 3]$. נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle \cdot, \cdot\rangle$ על V ע"י $\langle f, g\rangle = \int_0^3 f(t)g(t)dt$.

עבור כל קטע נתון $(a, b]$, נגדיר את הפונקציה $\chi_{(a,b]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $\chi_{(a,b]}(t) = 1$ לכל $t \in (a, b]$, ו $\chi_{(a,b]}(t) = 0$ לכל $t \notin (a, b]$.

(**הערות:** (i) לכל $f \in V$ מתקיימת הנוסחא $f = f(1)\chi_{(0,1]} + f(2)\chi_{(1,2]} + f(3)\chi_{(2,3]}$.
(ii) מקובל לקרוא לפונקציה $\chi_{(a,b]}$ "הפונקציה המציינת של $(a, b]$".)

יהי W תת-מרחב של V אשר נוצר ע"י שתי הפונקציות $\chi_{(0,3]}$ ו $\chi_{(0,1]}$.

(א) מצאו את המימדים של כל אחד מן המרחבים V ו W.

(ב) מצאו את הפונקציה ב W הקרובה ביותר לפונקציה $\chi_{(1,2]}$ ביחס לנורמה המושרית ע"י $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

(ג) מצאו קשר בין הבעיה בסעיף (ב) לבין בעיה גאומטרית מסויימת ב $\mathbb{R}^3$. נסחו את הבעיה הגאומטרית והסבירו באופן מדויק איך ומדוע מציאת פתרון לאחת משתי הבעיות היא שקולה למציאת פתרון לבעיה השניה.

כדי לעזור לכם בפתרון התרגיל הבא נזכיר קודם את ההגדרה של האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)dx$ ומספר תכונות של האינטגרל הזה. (נשתמש באינטגרל זה ובאינטגרל $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ כאשר נדבר יותר מאוחר בקורס זה, על התמרת פורייר והתמרת לפלס.)

הגדרה: נתונה פונקציה $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$. נניח שעבור כל קבוע חיובי R, הצמצום של f לקטע $[0,R]$ היא פונקציה רציפה למקוטעין. ההנחה הזו מבטיחה ש f אינטגרבילית (לפי רימן) בקטע $[0,R]$. אם הגבול $\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)dx$ קיים ושווה למספר סופי L אז נאמר שהאינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)dx$ קיים ושווה ל L. נאמר גם ש f אינטגרבילית על $[0,\infty)$. (בהגדרה זו R משתנה **רציף**, ז"א הוא שואף ל ∞ דרך **כל** המספרים החיובים, ולא רק השלמים.)

שתי תכונות של האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)dx$:

(i) (מבחן ההשואה לפונקציות לא שליליות). נניח שהפונקציות f ו g מוגדרות על $[0,\infty)$ ושתיהן רציפות למקוטעין על כל קטע $[0,R]$ ומקיימות $0 \le f(x) \le g(x)$ עבור כל $x \in [0,\infty)$. אם g אינטגרבילית ב $[0,\infty)$ אזי גם f אינטגרבילית ב $[0,\infty)$ ו $0 \le \int_0^\infty f(x)dx \le \int_0^\infty g(x)dx$.

(ii) (אינטגרביליות בהחלט). נניח ש $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין על כל קטע $[0,R]$. נניח גם ש $|f(x)|$ אינטגרבילית על $[0,\infty)$. (אז אומרים ש f **אינטגבילית בהחלט** על $[0,\infty)$.) אזי גם f עצמה אינטגרבילית והאינטגרלים המוכללים של f ושל $|f|$ מקיימים

$$\left|\int_0^\infty f(x)dx\right| \le \int_0^\infty |f(x)|dx$$

הערה: התכונה (i) מזכירה ודומה למבחן ההשואה עבור טורים של מספרים לא שליליים, והתכונה (ii) מזכירה ודומה למשפט שטור אשר מתכנס בהחלט גם מתכנס במובן הרגיל. למעשה גם ההוכחות של (i) ו (ii) דומות להוכחות של התוצאות האלו עבור טורים.

3. בכל סעיפי השאלה הזו V מסמן את קבוצת כל הפונקציות הרציפות $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ אשר מקיימות:

$(*)$ הפונקציה f חסומה, כלומר קיים קבוע חיובי אשר חוסם את $|f(x)|$ מלעיל לכל $x \in [0,\infty)$.

$(**)$ הפונקציה f אינטגרבילית בהחלט על $[0,\infty)$.

א. הוכיחו כי V מרחב לינארי מעל $\mathbb{C}$.

ב. מצאו פונקציה $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ אשר מקיימת את התנאי $(**)$ אבל לא מקיימת את התנאי $(*)$.

ג. הוכיחו כי, <u>לכל</u> f ו g ב V, האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ קיים. הוכיחו כי הפעולה הבינארית $\langle f,g\rangle := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ מגדירה מכפלה פנימית ב V.

ד. נבחר פונקציה רציפה מסוימת $\mu : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ אשר מקיימת $\mu(x+2\pi) = \mu(x)$ לכל $x \in [0,\infty)$ וגם $\mu(0) = 0$. תהי W קבוצת כל הפונקציות $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ בעלת הצורה $f = \mu \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \chi_{[2\pi(k-1),2\pi k)}$ כאשר $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא סידרה של מספרים קומפלקסיים אשר מקיימת $\sum_{k=1}^\infty |\alpha_k| < \infty$. (נזכיר שלכל קטע $[a,b)$ הפונקציה $\chi_{[a,b)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $\chi_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [a,b) \\ 0 & , \quad x \notin [a,b) \end{cases}$. לכן, לכל x, הטור $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \chi_{[2\pi(k-1),2\pi k)}(x)$ מתכנס כי רק אחד, לכל היותר, מהאיברים שלו שונה מ 0.)

הוכיחו כי W תת מרחב של V.

אם $\mu(x) \neq 0$ לכל $x \in (0, 2\pi)$ הוכיחו כי מערכת הפונקציות $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, הנתונה ע"י $\phi_k = \mu\chi_{[2\pi(k-1),2\pi k)}$ לכל $k \in \mathbb{N}$, היא מערכת אורתוגונלית ב W. מצאו תנאי על μ אשר מבטיח שמערכת זו היא גם אורתונורמלית.

האם $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא מערכת סגורה (כלומר בסיס $Schauder$ אורתוגונלי) ב W?

האם $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא מערכת שלמה ב W?

האם $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא מערכת סגורה ב V?

האם $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא מערכת שלמה ב V?

נמקו את תשובותיכם.

ה. נניח ש $\mu(x) = \sin x$. תהי $f \in V$ הפונקציה $f(x) = e^{-x}$. מצאו את ההיטל האורתוגונלי של f על המרחב W.

----

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}$ הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. הוכיחו שהתכונות 3 ו 4 בהגדרה 1.4 בעמוד 7 של הספר של זעפרני-פינקוס גוררות שהנוסחא

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n, \sum_{m=1}^{M} \beta_m v_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \alpha_n \overline{\beta_m} \langle u_n, v_m\rangle$$

מתקיימת עבור כל M ו N ב $\mathbb{N}$, עבור כל בחירה של איברים $u_1, u_2, ..., u_N$, $v_1, v_2, ..., v_M$ ב V ועבור כל בחירה של סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_M$ ב $\mathbb{F}$.

שימו לב שפרוש הסימון $\sum$ הוא **קצת שונה** באגף השמאלי ובאגף הימיני של הנוסחא הנ"ל. הסבירו מה ההבדל בין שני הפרושים של $\sum$.

(**הערה:** אם פותרים את התרגיל הזה לפני שלומדים את המשפטים בפרק 1 של ספר הלימוד, הוא אולי מקצר קצת את ההוכחות של חלק מהמשפטים.)

----

5. נתון מרחב מכפלה פנימית V מעל השדה $\mathbb{C}$. תהי $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ מערכת אורתונרמלית ב V.

נתון $f \in V$, לכל $N \in \mathbb{N}$ נגדיר

$S_N = \sum_{n=0}^{N} \langle f, v_n\rangle v_n$ וגם $T_N = \langle f, v_0\rangle v_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\langle f, v_{2n-1}\rangle v_{2n-1} + \langle f, v_{2n}\rangle v_{2n}\right)$.

(א) אם קיים $g \in V$ כך ש $\lim_{N\to\infty} \|T_N - g\| = 0$, הוכיחו שעבור אותו איבר g מתקיים גם $\lim_{N\to\infty} \|S_N - g\| = 0$.

האם גם נכון שהתנאי $\lim_{N\to\infty} \|S_N - g\| = 0$ גורר ש $\lim_{N\to\infty} \|T_N - g\| = 0$? נמקו.

(כאן $\|\cdot\|$ מסמן את הנורמה המושרית ע"י המכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$.)

(ב) עכשיו נניח, בנוסף להנחות הקודמות, שכל איברי V הם פונקציות קומפלקסיות על הקטע $[a, b]$. בפרט נניח שהפונקציות v_n הנ"ל מקיימות $|v_n(x)| \le 1$ לכל $x \in [a, b]$ ולכל $n \in \mathbb{N}$. עבור כל נקודה קבוע $x_0 \in [a, b]$ הוכיחו כי הגבול $\lim_{N\to\infty} S_N(x_0)$ קיים אם ורק אם הגבול $\lim_{N\to\infty} T_N(x_0)$ קיים, ושני הגבולות, כאשר הם קיימים, שווים זה לזה.

הערה: אפשר להשתמש בתוצאות התרגיל הנ"ל כאשר $V = E[-\pi, \pi]$ או $E_{\#}[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ והפונקציות v_n נתונות ע"י $v_0(x) = 1/\sqrt{2}$, $v_1(x) = \cos x$, $v_2(x) = \sin x$, $v_3(x) = \cos 2x$, $v_4(x) = \sin 2x$, $v_5(x) = \cos 3x$, $v_6(x) = \sin 3x$, ...וכו'.

כאשר עובדים עם מערכת אורתונורמלית כללית $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מקובל (כמו בפרק 1 של ספר הלימוד) לבדוק תכונות של הסכומים S_N. אבל כאשר עובדים עם המערכת הטריגונומטרית המיוחדת הנ"ל של סינוסים וקוסינוסים, אז בדרך כלל (לפי ה"מסורת") משתמשים בסכומים T_N במקום S_N (כמו בפרק 2 של הספר.) התרגיל שעשיתם עכשיו מסביר מדוע זה כמעט אותו דבר להשתמש ב T_N או ב S_N. כאן ברור כי $T_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ עבור מספרים מתאימים a_n ו b_n.
למעשה, בדיוק אותה הערה מתאימה גם למקרה של טורי פוריה קומפלקסיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$. בקודם ניקח $V=E[-\pi,\pi]$, אבל הפעם עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$. הפעם נגדיר את הפונקציות v_n ע"י $v_0(x)=1$, $v_1(x)=e^{ix}$, $v_2(x)=e^{-ix}$, $v_3(x)=e^{i2x}$, $v_4(x)=e^{-i2x}$, ... וכו' . גם במקרה הזה מקובל להתיחס לסכומים T_N במקום הסכומים S_N . כאן ברור כי $T_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$ עבור מספרים מתאימים c_n.

---

6. **יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מערכת אורתונורמלית ב V. ידוע שלכל $f\in V$, המספרים $c_n=\langle f,e_n\rangle$ מקיימים את התנאי $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$. מצד שני, אם נתונה סדרה של מספרים $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אשר מקיימת $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$, האם תמיד קיים $f\in V$ כך ש $c_n=\langle f,e_n\rangle$ לכל $n\in\mathbb{N}$? מצאו דוגמא שמראה שהתשובה לשאלה זו היא "לא".**
הצאה: אולי יותר קל לעבוד עם מרחב של סדרות. אבל אחרי שלומדים על טורי פורייה על $[-\pi,\pi]$ אפשר גם "לבשל" דוגמא נגדית בעזרתם.
הערה: אם V הוא מרחב Hilbert, אז התשובה לשאלה הנ"ל היא דווקא "כן", ותמיד. אבל לא נטפל במרחבי Hilbert בקורס זה.